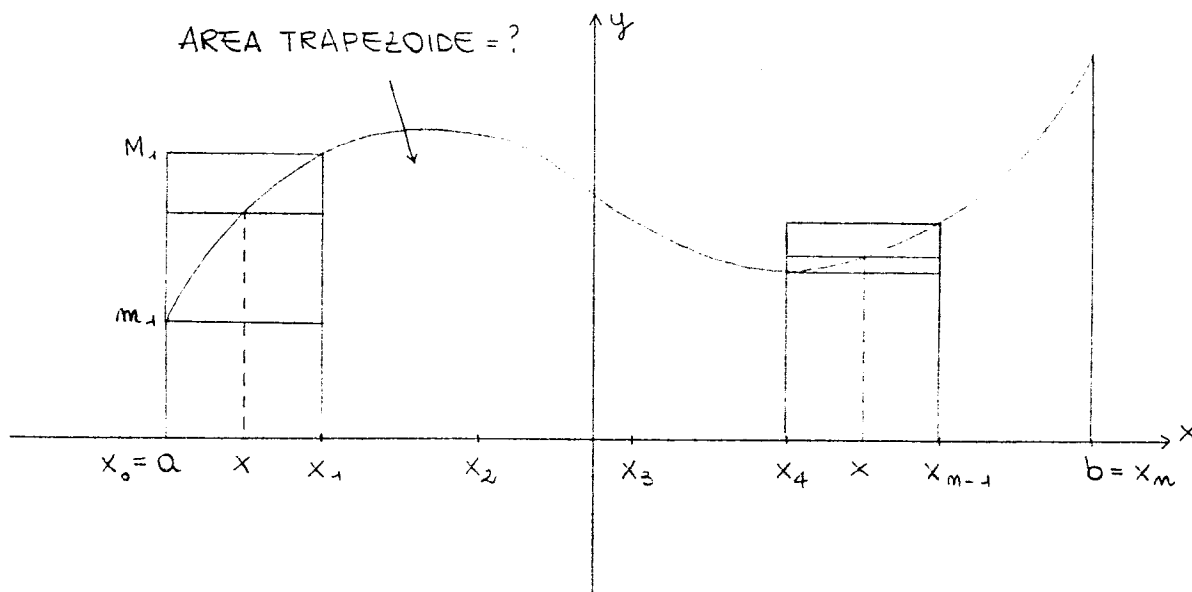


INTEGRAZIONE MULTIPLA

Consideriamo il caso di una variabile.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, con $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$.



Come si calcola l'area del trapezoido?

1) Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m]$.

2) Prendiamo, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$, $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

3) $f(x)$ ristretta all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ ha minimo m_i e massimo M_i .

$\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ risulta $m_i \leq f(x) \leq M_i$, da cui, posto $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, si ha

che $m_i \Delta x_i \leq f(x_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ e, sommando, $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$.

↑
area del plu-
rectangolo in-
scritto

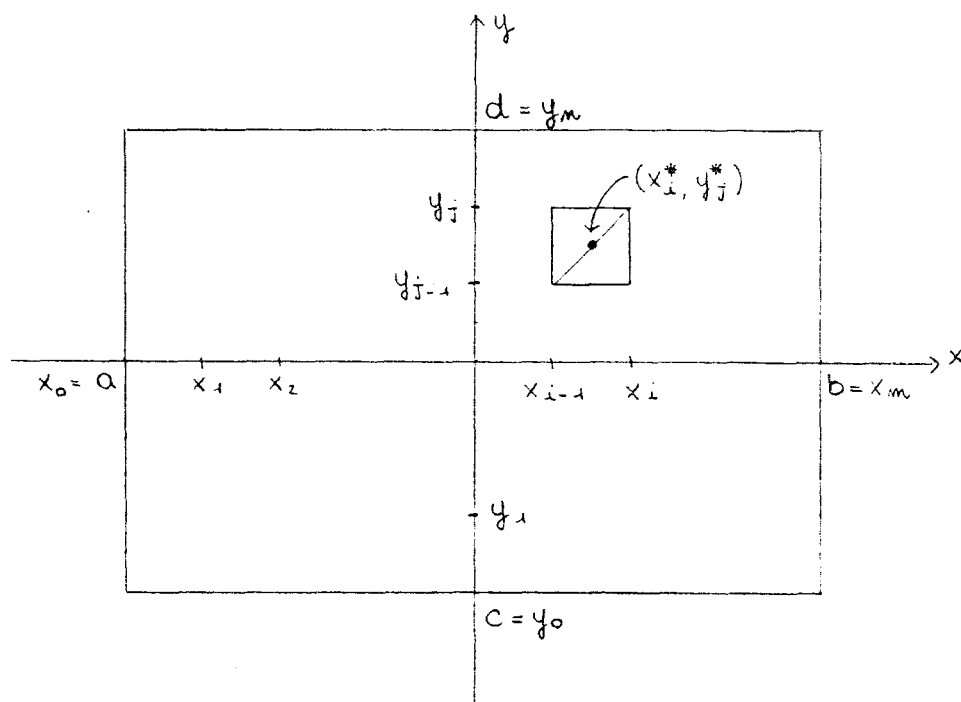
↑
area del plu-
rectangolo cir-
coscritto

TEOREMA: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Allora, al tendere a zero della massima ampiezza Δx_i , indipendentemente dalla suddivisione scelta di $[a, b]$ in intervalli di ampiezza Δx_i , la somma di Riemann (cioè la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti) tende a un n° reale positivo, detto area del trapezoido di f in $[a, b]$ e denotato con il simbolo:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{detto integrale definito di } f \text{ in } [a, b].$$

Con più variabili si complica il dominio: si passa da un segmento a un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Il teorema precedente si generalizza facilmente al caso di funzioni $z = f(x, y)$ in due variabili definite su domini rettangolari.

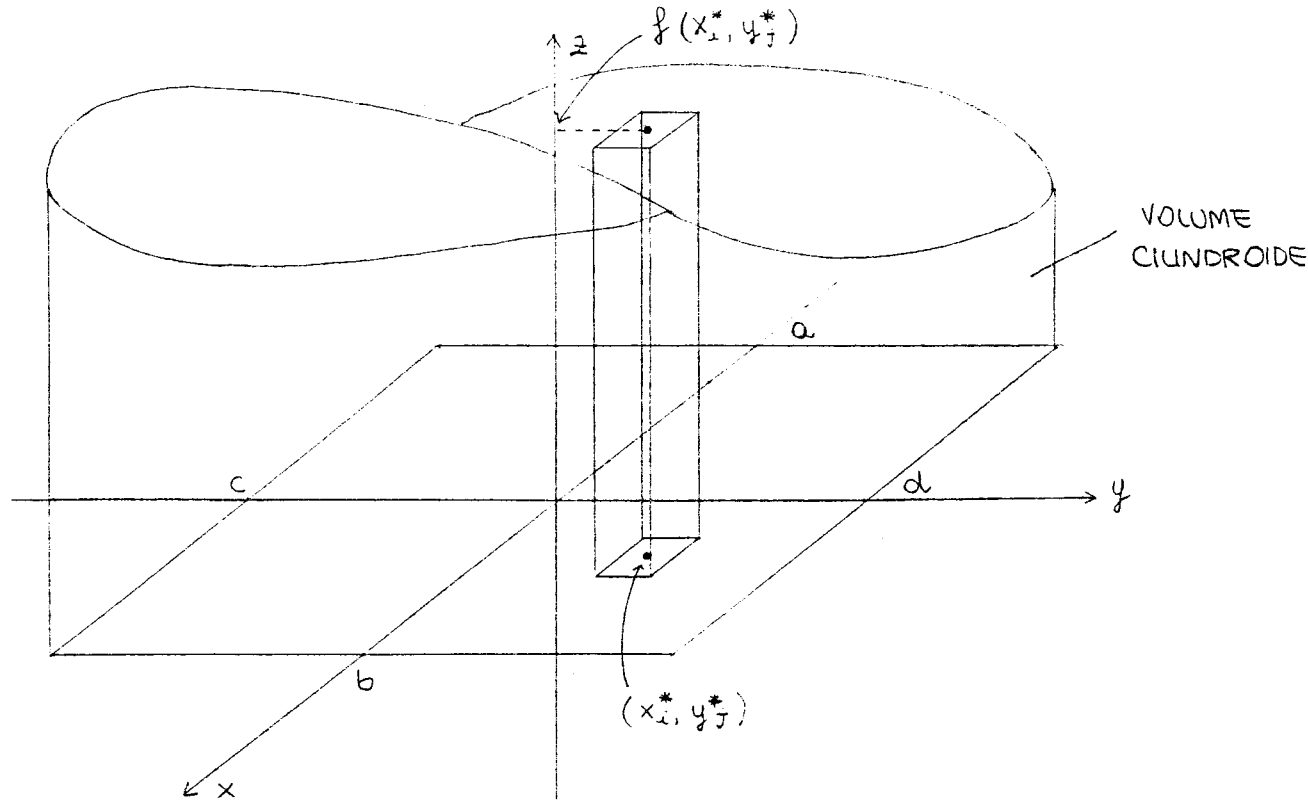


$$D = [a, b] \times [c, d] = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

Posiamo fare una partizione di D in piccoli rettangoli, dividendo l'intervallo $[a, b]$ mediante i punti $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ e l'intervallo $[c, d]$ mediante i punti $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$. La partizione di D consiste, allora, di $m \cdot m$ rettangoli R_{ij} (con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$) di lati $dx_i = x_i - x_{i-1}$ e $dy_j = y_j - y_{j-1}$. I rettangoli R_{ij} contengono i punti (x_i^*, y_j^*) tali per cui $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ e $y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]$.

L'area del rettangolo R_{ij} è pari a $dx_i \cdot dy_j$.

Il suo diametro (cioè la lunghezza della diagonale) è $d_{ij} = \sqrt{dx_i^2 + dy_j^2}$.

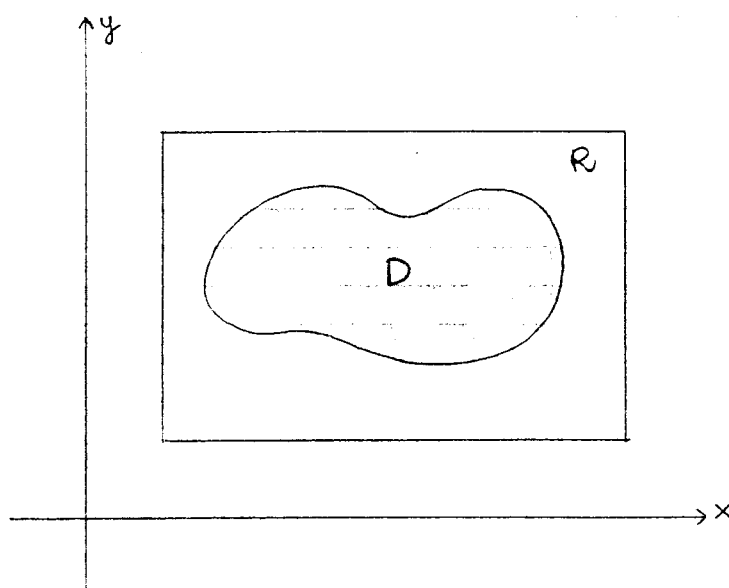


Il volume del cilindroide si approssima con la somma di Riemann:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) dx_i dy_j$$

TEOREMA: Se f è continua e ≥ 0 nel dominio rettangolare $D = [a, b] \times [c, d]$, allora, al tendere a zero del massimo diametro $d_{ij} = \sqrt{dx_i^2 + dy_j^2}$ e indipendentemente dalla suddivisione scelta per $[a, b]$ e $[c, d]$, la somma di Riemann tende a un unico limite, che coincide con il volume del cilindroide.

E se il dominio non è un rettangolo?



Se il dominio D non è un rettangolo, ma è comunque un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$, possiamo scegliere un rettangolo $R, [a,b] \times [c,d]$, con lati paralleli agli assi coordinati, in modo che D sia contenuto all'interno di R .
 Se $z = f(x,y)$ è una funzione continua e ≥ 0 in D , possiamo definire una nuova funzione $\bar{f}(x,y)$ in $[a,b] \times [c,d]$ in questo modo:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \setminus D \end{cases}$$

N.B.: In generale $\bar{f}(x,y)$ non è più continua.

DEF: In ogni caso, definiamo il volume del cilindroide come:

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \bar{f}(x,y) \, dx \, dy$$

Proprietà degli integrali doppi

a) Area nulla:

$$\text{Se } D \text{ ha area nulla, allora } \iint_D f(x,y) \, dx \, dy = 0$$

b) Volume del cilindroide di altezza 1:

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \text{area di } D$$

c) Integrali che rappresentano volumi:

Se $f(x,y) \geq 0$ in D , allora $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = V \geq 0$, dove V è il volume del cilindroide che si trova sopra il piano xy e sotto la superficie $z = f(x,y)$.

d) Se $f(x,y) \leq 0$ in D , allora $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = -V \leq 0$, dove V è il volume del cilindroide che si trova sotto il piano xy e sopra la superficie $z = f(x,y)$.

e) Linearità:

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

f) Preservazione della disuguaglianza:

$$\text{Se } f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D, \text{ allora } \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

g) Disuguaglianza triangolare:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

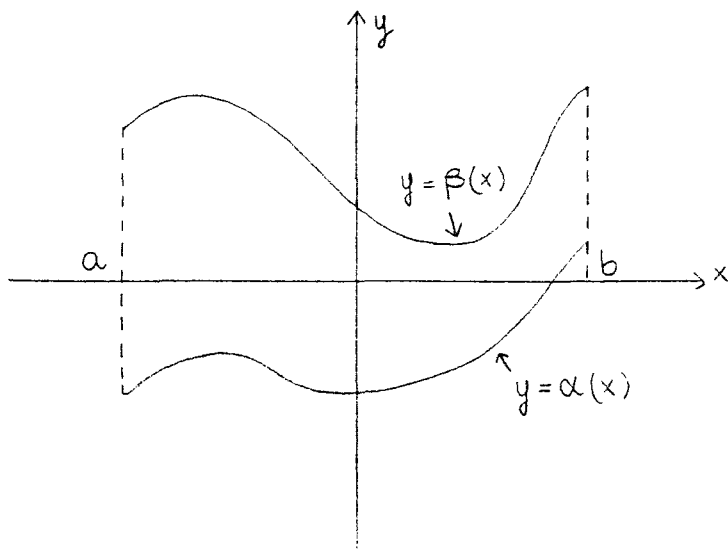
h) Additività dei domini:

Se D è un'unione finita e disgiunta di $D_1, D_2, \dots, D_n$, allora:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

Domini y-semplici e domini x-semplici

Se D è della forma:



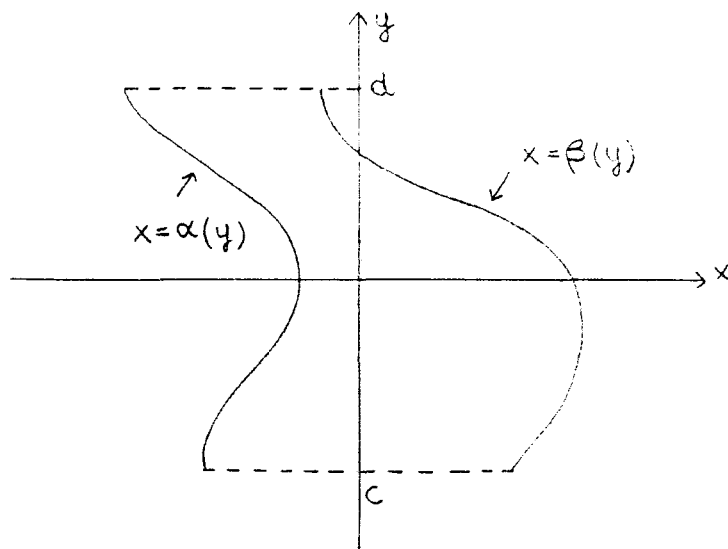
$\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
funzioni continue

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$x=a$ e $x=b$ sono i due lati verticali, $y=\alpha(x)$ e $y=\beta(x)$ sono i due "lati" orizzontali.

Allora si dice che D è y-SEMPLICE.

Se D è della forma:



$\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
funzioni continue

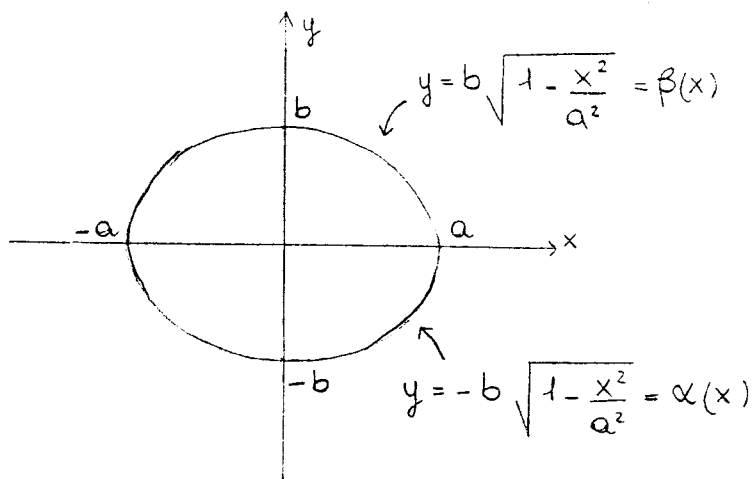
$$\alpha(y) \leq \beta(y) \quad \forall y \in [c, d]$$

$y=c$ e $y=d$ sono i due lati orizzontali, $x=\alpha(y)$ e $x=\beta(y)$ sono i due "lati" verticali.

Allora si dice che D è x-SEMPLICE.

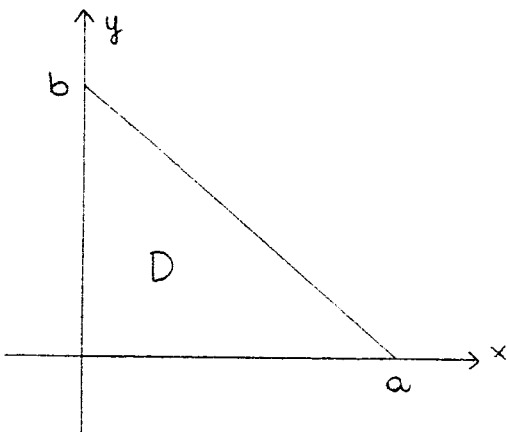
- DEF: - Si dice che D è un dominio y-semplICE se è delimitato da due rette verticali $x=a$ e $x=b$ e da due grafici continui $y=\alpha(x)$ e $y=\beta(x)$ compresi tra queste rette.
- Si dice che D è un dominio x-semplICE se è delimitato dalle rette orizzontali $y=c$ e $y=d$ e da due grafici continui $x=\alpha(y)$ e $x=\beta(y)$ compresi tra queste rette.

Esempi:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

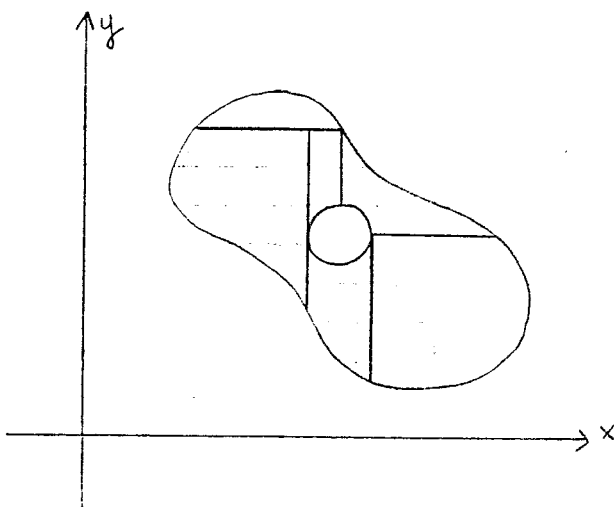
È sia y-semplice
che x-semplice.



È sia y-semplice
che x-semplice.

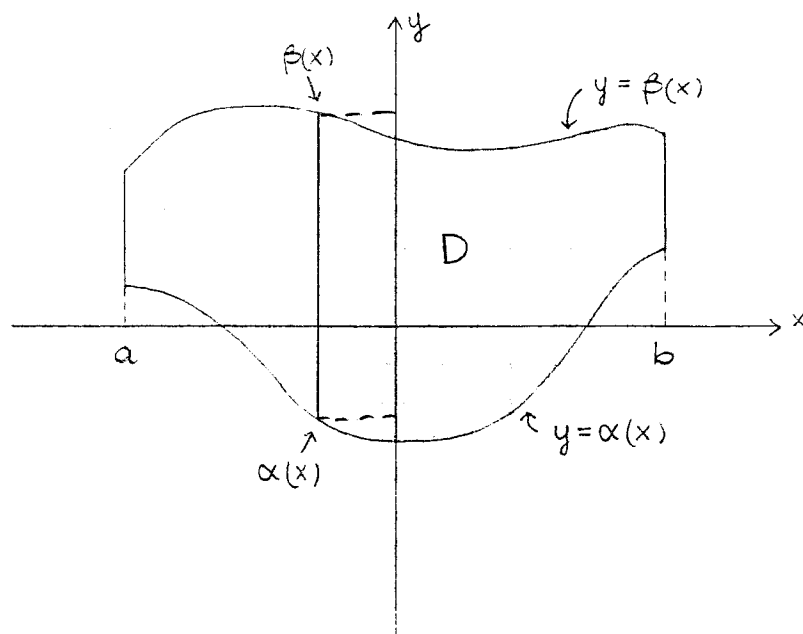
N.B.: Spesso D , pur non essendo x-semplice o y-semplice, è l'unione disgiunta di un n° finito di sottodomini che sono x-semplici o y-semplici.
Un dominio di questo tipo è detto regolare.

Esempio:



Posiamo integrare
a pezzi.

TEOREMA:



Supponiamo che $f(x, y)$ sia continua in D e che D sia y -semplice e delimitato da $x=a$, $x=b$, $y=\alpha(x)$ e $y=\beta(x)$. Allora:

$\iint_D f(x, y) dx dy$ = volume del cilindroide verticale passante per il contorno di D e compreso tra il piano xy e la superficie $z = f(x, y)$.

Consideriamo la sezione di questo solido con il piano verticale perpendicolare all'asse x nel punto x . Si noti che x è costante in quel piano. Se usiamo le proiezioni degli assi y e z sul piano come sue assi coordinati, la sezione è una regione piana delimitata dalle rette verticali $y=\alpha(x)$ e $y=\beta(x)$, dalla retta orizzontale $z=0$ e dalla curva $z=f(x, y)$. L'area della sezione è, quindi, data da:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = A(x)$$

L'integrale doppio $\iint_D f(x, y) dx dy$ si ottiene sommando i volumi di fette "sottili" di area $A(x)$ e spessore dx comprese tra $x=a$ e $x=b$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Dal punto di vista della notazione, di solito si scrive:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

Un analogo risultato vale nel caso di domini x -semplici.

Le espressioni nel membro di destra delle formule precedenti sono chiamate **integrali iterati**. L'iteratione è il procedimento che riduce il problema del calcolo di un integrale doppio (o multiplo) a quello di calcolare, uno dopo l'altro, due (o più) integrali definiti unidimensionali.

L'integrale :

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy$$

è detto **integrale interno**, in quanto deve essere calcolato per primo.

Esso sarà calcolato usando le tecniche standard e considerando x come una costante. Il risultato di questo calcolo è una funzione solo di x (notare che ha l'integrando che gli estremi dell'integrale interno possono dipendere da x) e costituisce l'integrando dell'integrale esterno, nel quale x è la variabile di integrazione.

Riassumendo:

Iterazione degli integrali doppi:

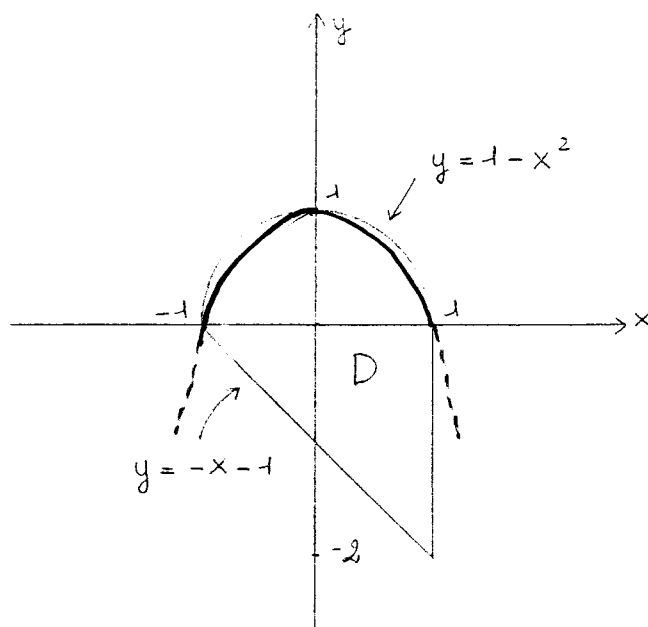
Se $f(x,y)$ è una funzione continua nel dominio y -semplice D dato da $a \leq x \leq b$ e $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$, allora:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy$$

Analogamente, se $f(x,y)$ è una funzione continua nel dominio x -semplice D dato da $c \leq y \leq d$ e $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$, allora:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx$$

Esempio:



$$z = f(x, y) = xy$$

D è y-semiplice.

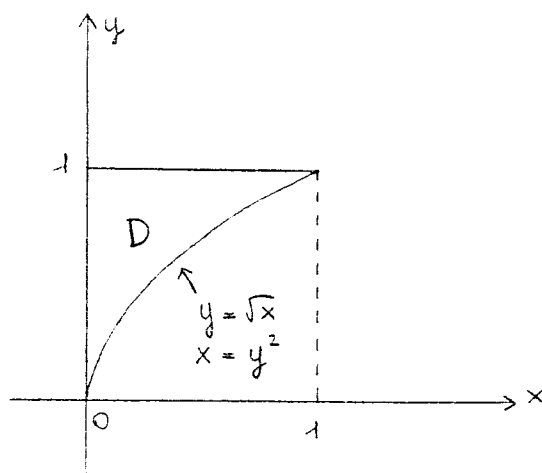
$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-x-1}^{1-x^2} xy \, dy = \int_{-1}^1 \frac{x}{2} \left[y^2 \right]_{-x-1}^{1-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{2} \left[(1-x^2)^2 - (-x-1)^2 \right] dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{2} (x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1) dx =$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{x^5}{2} - \frac{3}{2}x^3 - x^2 \right) dx = \left[\frac{x^6}{12} - \frac{3}{8}x^4 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

$$\frac{1}{12} - \frac{3}{8} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

Esempio:



$$z = f(x, y) = e^{y^3}$$

D è y -semplice:

$$\iint_D e^{y^3} dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \quad \text{Chi è } \int e^{y^3} dy \text{ ???}$$

D è anche x -semplice:

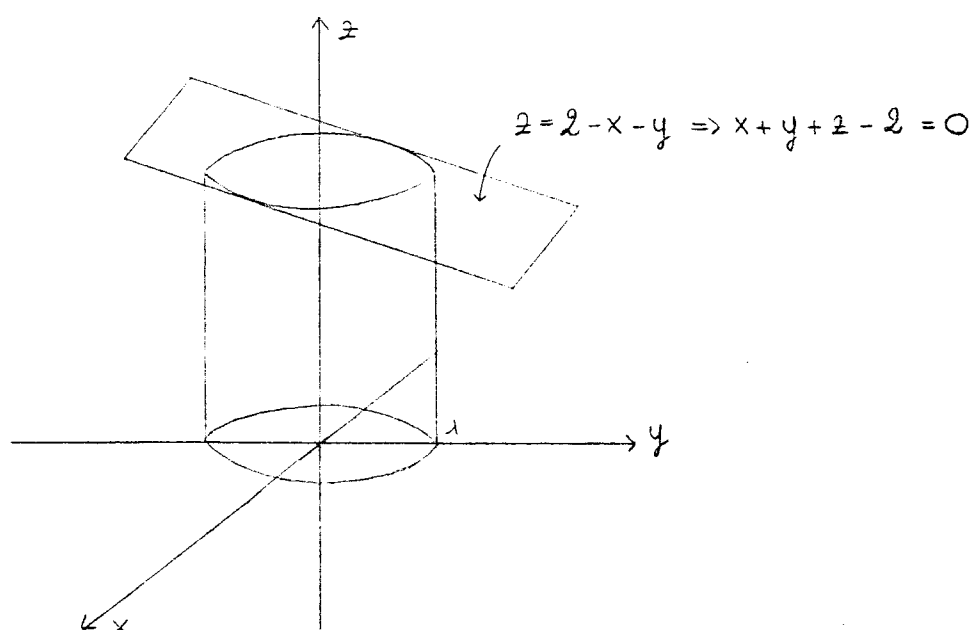
$$\begin{aligned} \iint_D e^{y^3} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3} dx = \int_0^1 dy e^{y^3} \int_0^{y^2} 1 dx = \\ &= \int_0^1 e^{y^3} [x]_0^{y^2} dy = \int_0^1 e^{y^3} (y^2 - 0) dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} [e^{y^3}]_0^1 = \frac{1}{3} (e - 1)$$

ESERCIZIO

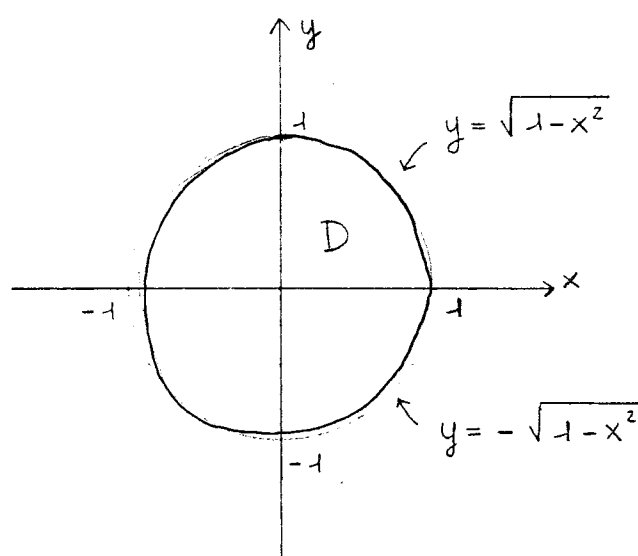
Calcolare il volume del solido:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq -x - y + 2 \}$$



$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$z = f(x, y) = 2 - x - y$$



D è y -semplice.

$$\begin{aligned}
 \text{Volume di } V &= \iint_D (2-x-y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2-x-y) \, dy = \\
 &= \int_{-1}^1 dx \left[2y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \\
 &= \int_{-1}^1 \left[2\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)}{2} - \left(-2\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)}{2} \right) \right] dx = \\
 &= \int_{-1}^1 (4\sqrt{1-x^2} - 2x\sqrt{1-x^2}) \, dx = 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx - 2 \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx
 \end{aligned}$$

Calcoliamo $\int \underbrace{(-2x)}_{\varphi'(x)} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\varphi(x)} \, dx :$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt \quad t = \varphi(x) \quad \text{Integrazione per sostituzione}$$

$$\int -2x\sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \int t^{1/2} \, dt = \frac{1}{1+1/2} t^{1+1/2} + c = \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} + c$$

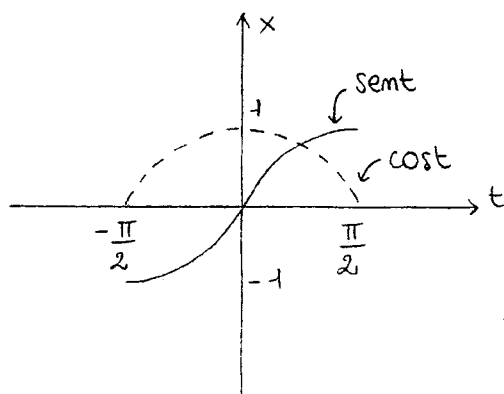
$$-2 \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_{-1}^1 = 0$$

Calcoliamo $\int \sqrt{1-x^2} \, dx :$

$$x = \sin t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \pm \cos t$$

$$dx = \cos t \, dt$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \pm \cos t \cos t \, dt = \pm \int \cos^2 t \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$



$$\begin{aligned}
\int \cos^2 t \, dt &= \int \cos t \cdot \cos t \, dt = \sin t \cdot \cos t - \int \sin t (-\sin t) \, dt = \\
&= \sin t \cos t + \int \sin^2 t \, dt = \sin t \cos t + \int (1 - \cos^2 t) \, dt = \\
&= \sin t \cos t + \int 1 \, dt - \int \cos^2 t \, dt = \sin t \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt \\
2 \int \cos^2 t \, dt &= \sin t \cos t + t + c \Rightarrow \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) + c \\
\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} [t + \sin t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (4\sqrt{1-x^2} - 2x\sqrt{1-x^2}) \, dx &= 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx - 2 \int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = \\
&= 4 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = 2\pi
\end{aligned}$$

Richiami sull'integrazione di funzioni continue in una variabile

① Integrazione per parti:

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$

ove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$

Esempi:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^2 e^x dx &= e^x x^2 - \int e^x \cdot 2x dx = x^2 e^x - \left[e^x \cdot 2x - \int e^x \cdot 2 dx \right] = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\text{c) } \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

$$\text{d) } \int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \varphi(x) = t = 1+x^2 \quad \varphi'(x) = 2x \quad dt = 2x dx$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln |t| + c =$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

② Integrazione per sostituzione:

1^a forma:

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \Big|_{t=\varphi(x)}$$

Esempi:

$$a) \int \underbrace{\cos(enx)}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\varphi'(x)} dx = \int \cos t dt \Big|_{t=enx} = \sin(enx) + c$$

$$b) \int \frac{en(tgx)}{\sin x \cos x} dx \quad \text{Dividiamo e moltiplichiamo il denominatore per } \cos x$$

$$= \int \frac{en(tgx)}{tgx} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}_{\varphi'(x)} dx = \int \frac{ent}{t} dt = \int \overset{u=\varphi(t)}{ent} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{\varphi'(t)} dt \Big|_{t=tgx} =$$

$$= \int u du \Big|_{u=ent} \Big|_{t=tgx} = \frac{u^2}{2} + c \Big|_{u=ent} \Big|_{t=tgx} = \frac{en^2(tgx)}{2} + c$$

2^a forma:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad \text{N.B.: } \varphi(t) \text{ deve essere invertibile!}$$

Esempi:

$$c) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 1/t \quad \text{allora } dx = \frac{1}{t} dt$$

N.B.: $t = e^x$ è invertibile!

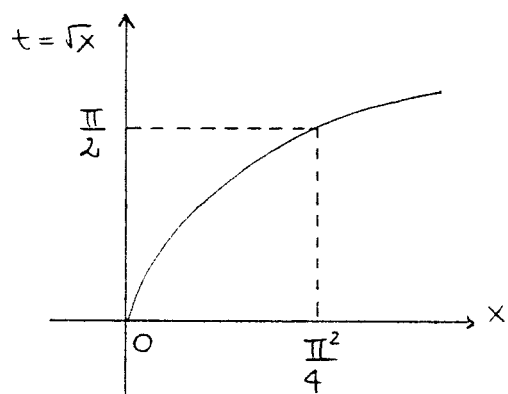
$$= \int \frac{1}{t + 1/t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t + c = \arctan(e^x) + c$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \sqrt{x} \, dx$$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t \, dt$$

Attenzione: bisogna modificare gli estremi di integrazione!



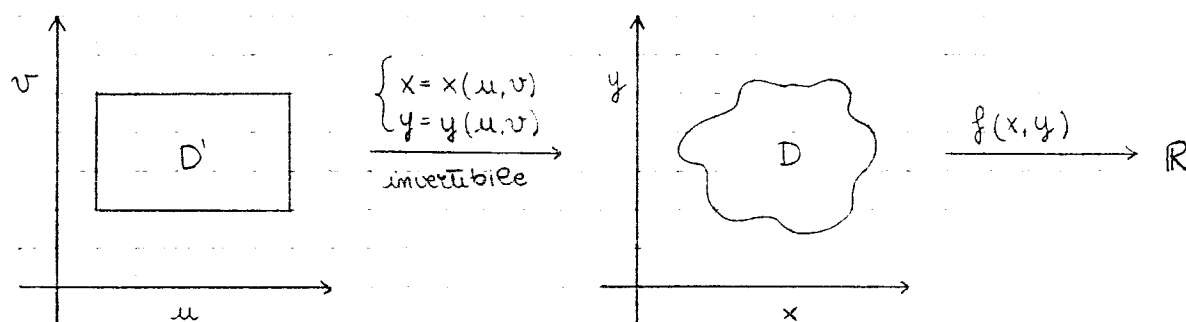
$x = \varphi(t)$ è invertibile
nell'intervallo di
integrazione.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t \, dt \stackrel{\text{P.P.}}{=} 2 \sin t \cdot 2t - \int 2 \sin t \cdot 2 \, dt = 2t \sin t + 2 \cos t + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t \, dt = \left[2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

Trasformazione in coordinate polari

Come funziona il metodo della sostituzione in due o più variabili?



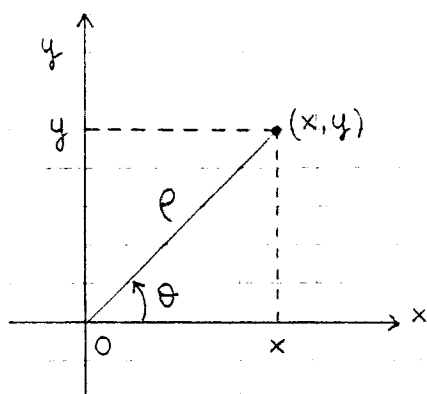
$$\iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) du dv \xleftrightarrow{??} \iint_D f(x, y) dx dy$$

Supponiamo di avere funzioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ tali per cui l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \supseteq D' &\longrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

sia biettiva.

Esempio:



θ = angolo orientato

ρ = distanza del punto (x, y) dall'origine

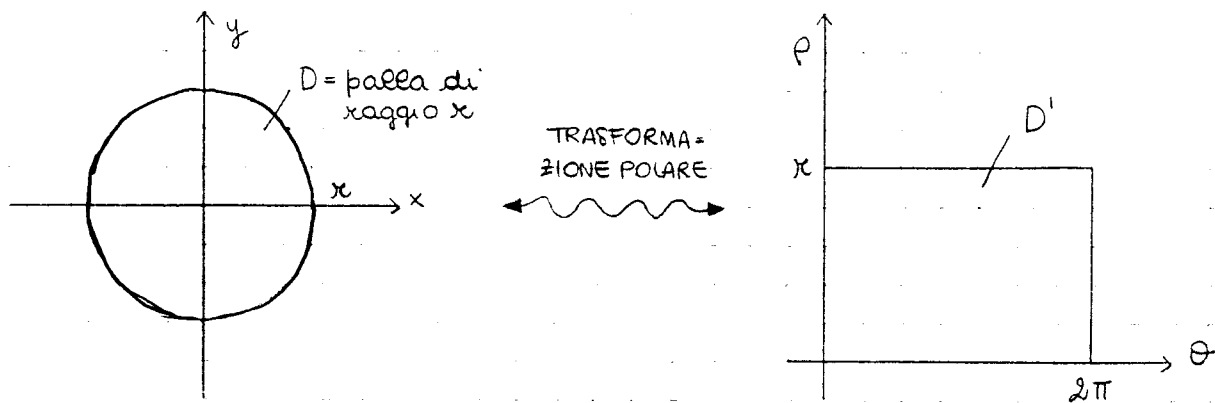
La trasformazione:

$$[0, 2\pi[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

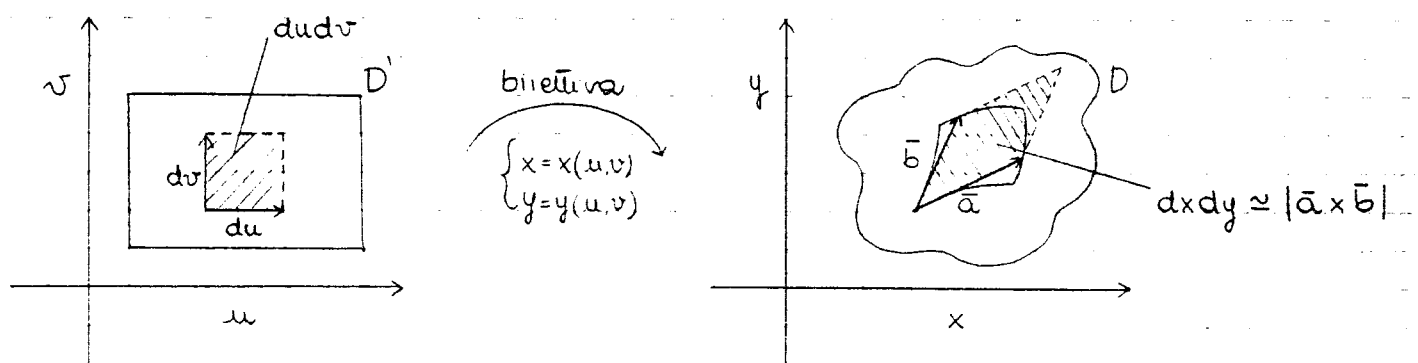
$$(\rho, \theta) \longmapsto (x, y) \text{ ove } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

È una trasformazione biettiva (a meno di insemi di axes nulli) ed è detta trasformazione polare.

Esempio di Trasformazione polare:



La trasformazione di un integrale doppio in coordinate polari è solo un caso particolare di una formula generale di cambiamento di variabili per gli integrali doppi.



L'elemento del dominio D' ha area $du dv$.

L'elemento del dominio D ha area $dx dy$; questo elemento d'area è approssimato dall'elemento d'area trapezzoidale, individuato dai vettori tangenti alla trasformazione.

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du \right) \quad \text{Tengo fisso } v \text{ e cambio } u$$

$$\vec{b} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \quad \text{Tengo fisso } u \text{ e cambio } v$$

$dx dy \approx |\vec{a} \times \vec{b}|$: il prodotto vettoriale è un vettore il cui modulo è pari all'area del parallelogramma avente per lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$dx dy \cong |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \left(0, 0, \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| du dv =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right\| du dv.$$

La matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

associata alla trasformazione:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

è detta la matrice Jacobiana della trasformazione e si indica con:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Il determinante della matrice Jacobiana è detto lo Jacobiano:

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

Abbiamo in definitiva provato che:

$$dx dy \cong \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\| du dv$$

ossia che l'area dell'elemento $dx dy$ è circa pari al valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana, moltiplicato per $du dv$.

TEOREMA:

Sia:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

una trasformazione del piano biettiva di classe C^1 (ossia $x(u,v)$ e $y(u,v)$ sono di classe C^1) che trasforma il dominio D' nel piano uv nel dominio D nel piano xy . Allora, per ogni $z = f(x,y)$ continua in D , si ha:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\| du dv$$

Inoltre si ha che:

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|}$$

Ovvero: Lo Jacobiano della trasformazione inversa è pari al reciproco dello Jacobiano della trasformazione.

ESEMPIO IMPORTANTE

Qual è la matrice Jacobiana della trasformazione polare?

$$x = \rho \cos \theta ; \quad y = \rho \sin \theta$$

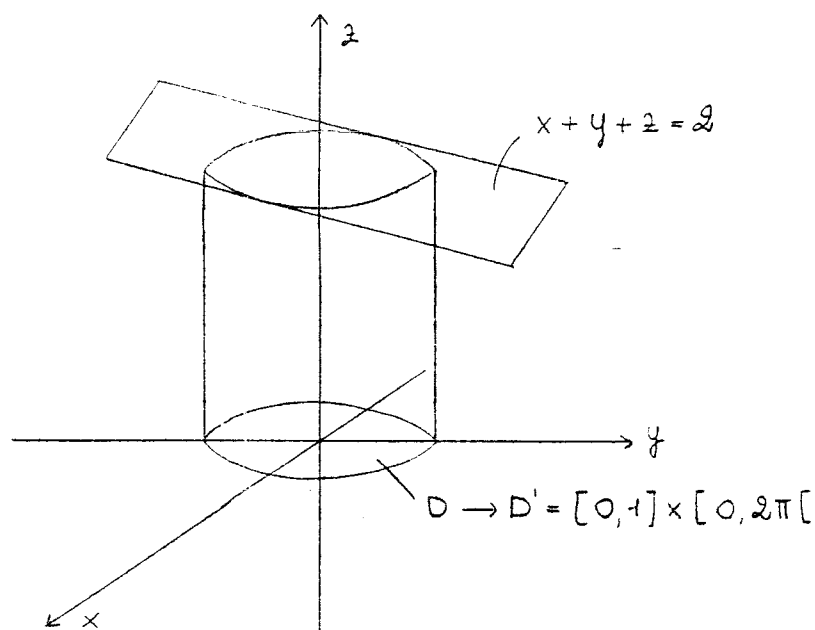
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{dunque lo Jacobiano corrispondente è}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho \geq 0$$

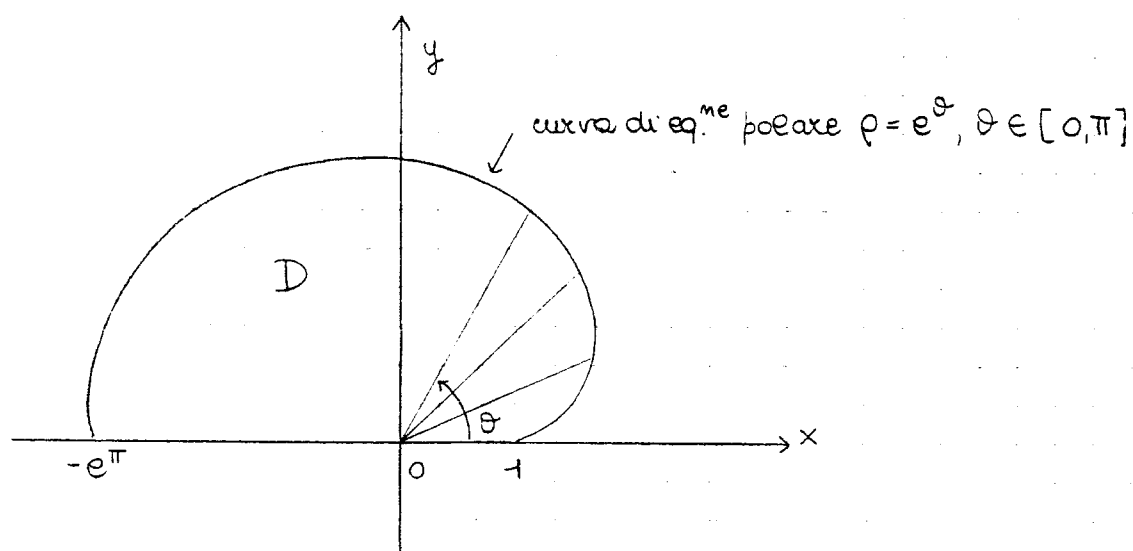
ESERCIZIO

Calcolare il volume del cilindro:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq -x - y + 2 \}$$



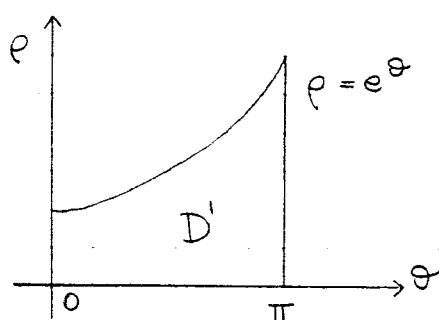
$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 - x - y) \, dx \, dy = \iint_{D'} (2 - \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta) \, \rho \, d\rho \, d\vartheta = \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho - \rho^2 \cos \vartheta - \rho^2 \sin \vartheta) \, d\vartheta = \\ &= \int_0^1 \left(2\rho [\vartheta]_0^{2\pi} - \rho^2 [\sin \vartheta]_0^{2\pi} + \rho^2 [\cos \vartheta]_0^{2\pi} \right) d\rho = \\ &= \int_0^1 4\pi \rho \, d\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = 4\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi \end{aligned}$$



Area di $D = \iint_D 1 \cdot dx dy$

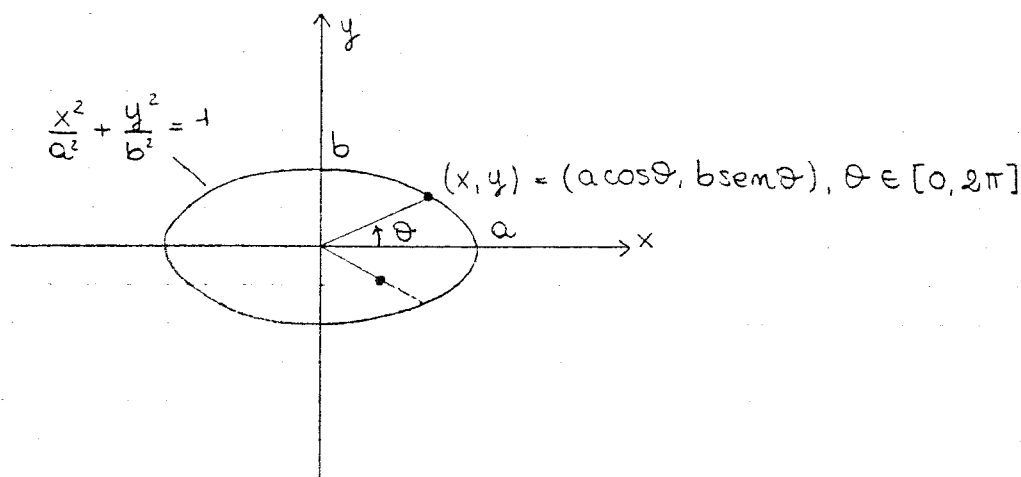
il volume del cilindroide di altezza 1
 è pari all'area di D .

D in coordinate polari si trasforma in D' :



$$\begin{aligned}
 \text{Area di } D &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} \rho \, d\rho = \int_0^\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{e^\theta} d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (e^{2\theta} - 0) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2\theta} \right]_0^\pi = \\
 &= \frac{1}{4} \left[e^{2\theta} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1) = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}
 \end{aligned}$$

Una variante della trasformazione polare: la trasformazione ellittica



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Trasformazione ellittica:

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \theta \\ y = b \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{con } a, b > 0 \text{ fissati}$$

Esempio:

L'area della superficie racchiusa nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è pari a:

$$\iint_E dx dy = \iint_{E'} \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right\| d\rho d\theta \quad \text{dove } E' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

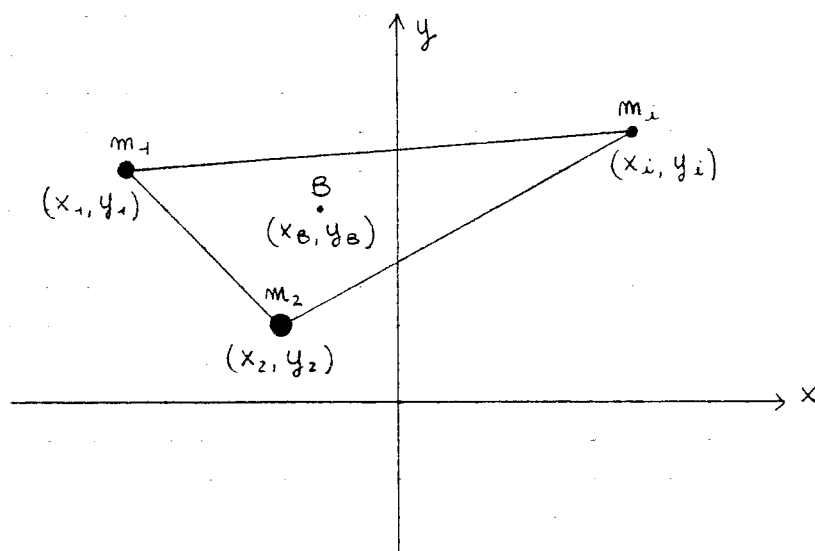
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = ab \rho \cos^2 \theta + ab \rho \sin^2 \theta = ab \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = ab \rho$$

$$\begin{aligned} \iint_E dx dy &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} ab \rho d\theta = \int_0^1 ab \rho [\theta]_0^{2\pi} d\rho = \\ &= ab \int_0^1 \rho \cdot 2\pi d\rho = 2\pi ab \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = \pi ab \end{aligned}$$

N.B.: Se ci troviamo a dover integrare $f(x, y)$ su un dominio ellittico, usiamo la trasformazione ellittica, ricordando che essa ha Jacobiano ab .

Baricentro



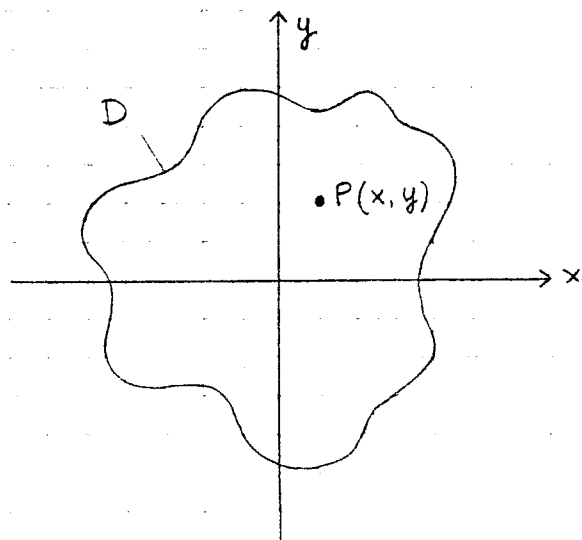
Dal punto di vista statistico, i punti possono essere visti come degli eventi. La probabilità di trovare un certo evento nel punto (x_i, y_i) dipende da m_i .

m_i = massa posta in (x_i, y_i)

Coordinate del baricentro:

$$x_B = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad ; \quad y_B = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Passiamo, ora da un sistema discreto a uno continuo:



Il punto $P = (x, y) \in D$ ha densità (= massa per unità di superficie) data da $\delta = \delta(x, y)$.

$$\iint_D \delta(x, y) \, dx \, dy = \text{massa di } D$$

Coordinate del baricentro:

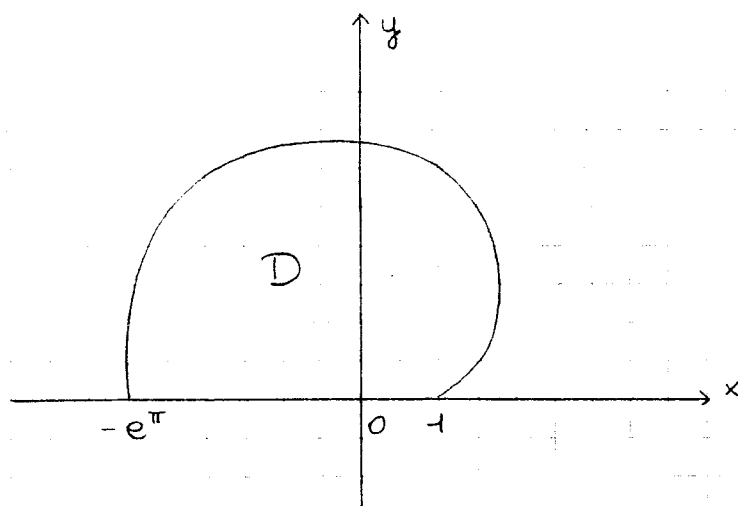
$$x_B = \frac{\iint_D x \delta(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \delta(x, y) \, dx \, dy} ; \quad y_B = \frac{\iint_D y \delta(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \delta(x, y) \, dx \, dy}$$

N.B.: Se la superficie è omogenea, cioè la densità è costante, cioè $\delta(x, y) = k$, allora le coordinate del baricentro diventano:

$$x_B = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy} ; \quad y_B = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}$$

ESERCIZIO

Calcolare le coordinate del baricentro.



$$\rho = e^\theta, \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$\text{Area di } D = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}$$

Calcoliamo il numeratore per x_B :

$$\begin{aligned}\iint_D x \, dx \, dy &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} \rho \cos\theta \, \rho \, d\rho = \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} \rho^2 \cos\theta \, d\rho = \\ &= \int_0^\pi \cos\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{e^\theta} d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{3} e^{3\theta} \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi e^{3\theta} \cos\theta \, d\theta\end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\int e^{3\theta} \cos\theta \, d\theta &= \sin\theta e^{3\theta} - \int \sin\theta \cdot 3e^{3\theta} \, d\theta = \sin\theta e^{3\theta} - 3 \int \sin\theta e^{3\theta} \, d\theta = \\ &= \sin\theta e^{3\theta} - 3 \left[-\cos\theta e^{3\theta} + 3 \int \cos\theta e^{3\theta} \, d\theta \right] = \\ &= \sin\theta e^{3\theta} + 3 \cos\theta e^{3\theta} - 9 \int \cos\theta e^{3\theta} \, d\theta = \\ &= e^{3\theta} (\sin\theta + 3 \cos\theta) - 9 \int \cos\theta e^{3\theta} \, d\theta \\ \int \cos\theta e^{3\theta} \, d\theta &= \frac{1}{10} e^{3\theta} (\sin\theta + 3 \cos\theta) + c\end{aligned}$$

Perciò: $x_B =$

$$\iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{30} \left[e^{3\theta} (\sin\theta + 3 \cos\theta) \right]_0^\pi = \frac{1}{30} (-3e^{3\pi} - 3) = \frac{1}{10} (-e^{3\pi} - 1)$$

$$x_B = -\frac{e^{3\pi} + 1}{10} \cdot \frac{4}{e^{2\pi} - 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{e^{3\pi} + 1}{1 - e^{2\pi}} < 0$$

Calcoliamo il numeratore per y_B :

$$\begin{aligned}\iint_D y \, dx \, dy &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} \rho \sin\theta \, \rho \, d\rho = \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} \rho^2 \sin\theta \, d\rho = \\ &= \int_0^\pi \sin\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{e^\theta} d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{3} e^{3\theta} \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi e^{3\theta} \sin\theta \, d\theta\end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
 \int e^{3\vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta &= \frac{1}{3} e^{3\vartheta} \sin \vartheta - \frac{1}{3} \int e^{3\vartheta} \cos \vartheta \, d\vartheta = \\
 &= \frac{1}{3} e^{3\vartheta} \sin \vartheta - \frac{1}{30} e^{3\vartheta} (\sin \vartheta + 3 \cos \vartheta) + c = \\
 &= \frac{1}{3} e^{3\vartheta} \left(\sin \vartheta - \frac{1}{10} \sin \vartheta - \frac{3}{10} \cos \vartheta \right) + c = \\
 &= \frac{1}{30} e^{3\vartheta} (9 \sin \vartheta - 3 \cos \vartheta) + c = \\
 &= \frac{1}{10} e^{3\vartheta} (3 \sin \vartheta - \cos \vartheta) + c
 \end{aligned}$$

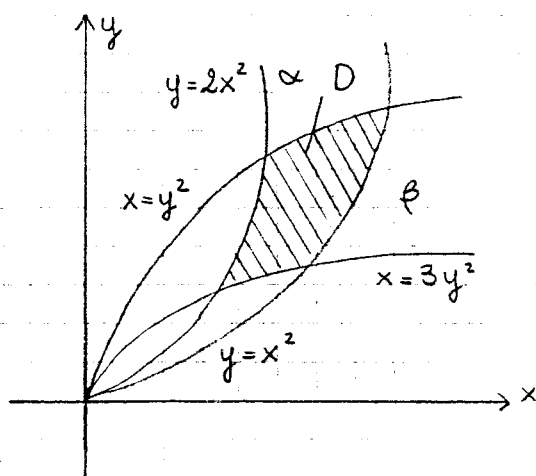
Pertanto:

$$\iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{30} \left[e^{3\vartheta} (3 \sin \vartheta - \cos \vartheta) \right]_0^\pi = \frac{1}{30} (e^{3\pi} + 1)$$

$$y_B = \frac{1}{30} (e^{3\pi} + 1) \cdot \frac{4}{e^{2\pi} - 1} = \frac{2}{15} \frac{e^{3\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} > 0$$

ESEMPIO

Determinare l'area della regione piana finita delimitata dalle 4 parabole: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$.



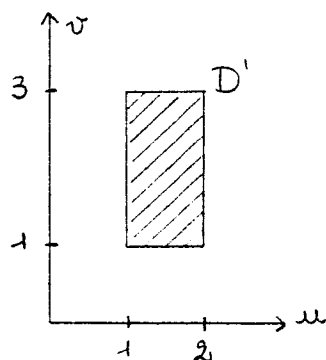
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = ?? \quad \text{Area di } D = \iint_D dx \, dy = ??$$

D è data come intersezione di due fasce: nella prima fascia (α) abbiamo $x > 0, y > 0, 1 \leq y/x^2 \leq 2$; nella seconda fascia (β) abbiamo $x > 0, y > 0, 1 \leq x/y^2 \leq 3$.

$D = \alpha \cap \beta \cap [x > 0, y > 0]$ nel piano xy

Dire che $x > 0, y > 0$ è superfluo ai fini del calcolo di D , ma è utile per il calcolo dell'inversa.

Se chiamiamo $u = y/x^2$ e $v = x/y^2$, D si trasforma in $D' = [1, 2] \times [1, 3]$ nel piano uv .



Dobbiamo controllare che la trasformazione sia biettiva! A tal fine, calcoliamo la trasformazione inversa.

Trovare l'inversa significa risolvere:

$$T \begin{cases} u = y/x^2 \\ v = x/y^2 \end{cases} \quad \text{in } x \text{ e } y$$

$$\begin{cases} u^2 \cdot v = \frac{y^2}{x^4} \cdot x/y^2 = x^{-3} \Rightarrow x = (u^2 v)^{-1/3} \\ u \cdot v^2 = y/x^2 \cdot x^2/y^4 = y^{-3} \Rightarrow y = (u v^2)^{-1/3} \end{cases} \quad \text{con } u, v > 0$$

La trasformazione inversa è:

$$T^{-1} \begin{cases} x = (u^2 v)^{-1/3} \\ y = (u v^2)^{-1/3} \end{cases} \Rightarrow \text{dati } u \text{ e } v, \text{ possiamo trovare } x \text{ e } y$$

$$\text{Area di } D = \iint_D dx dy = \int_1^2 du \int_1^3 \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\| dv$$

Ricordiamo che il determinante di $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ è il reciproco del deter-

minante di $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ espresso in termini di x e y .

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 1/y^2 & -2x/y^3 \end{pmatrix} = \frac{4}{x^2 y^2} - \frac{1}{x^2 y^2} =$$

$$= \frac{3}{x^2 y^2} = 3u^2 v^2 \quad \text{perché } u \cdot v = \frac{1}{xy}$$

Quindi $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3u^2 v^2}$

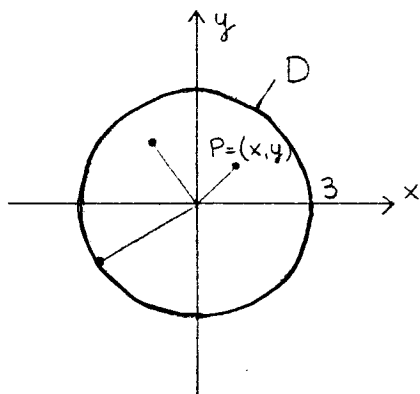
Così, area di $D = \int_1^2 du \int_1^3 \frac{1}{3u^2 v^2} dv = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{u^2} du \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv =$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{u^2} \left[-\frac{1}{v} \right]_1^3 du = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{u^2} (-1/3 + 1) du = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{2}{3} du =$$

$$= \frac{2}{9} \int_1^2 \frac{1}{u^2} du = \frac{2}{9} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = \frac{2}{9} (-1/2 + 1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

ESERCIZIO

Determinare la distanza media dall'origine dei punti del disco
 $D: x^2 + y^2 \leq 9$.

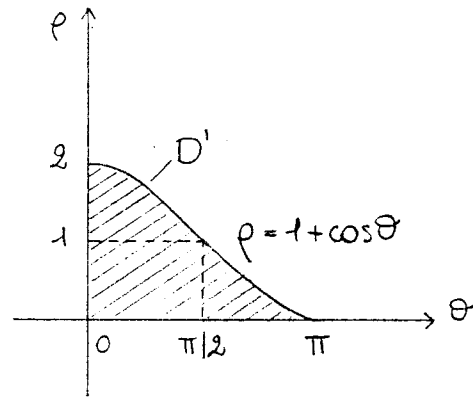
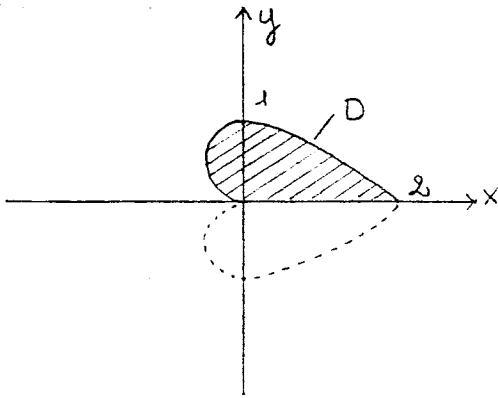


$$\frac{\iint_D d(P, O) dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy}{9\pi} = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho \cdot \rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{9\pi} \cdot 2\pi \int_0^3 \rho^2 d\rho = \frac{2}{9} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 = 2$$

ESERCIZIO

DEF: la cardioide è il luogo geometrico dei punti (x, y) che soddisfanno l'eq.^{me} polare $\rho = 1 + \cos \theta$, con $\theta \in [0, \pi]$.



Calcolare:

perché D' non
è un rettangolo!

$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho \sin\theta \, \rho \, d\rho = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{1+\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin\theta [\rho^3]_0^{1+\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin\theta (1+\cos\theta)^3 d\theta \quad \text{Pongo } t = \cos\theta \quad dt = -\sin\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_\alpha^\beta (1+t)^3 dt = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} (1+t)^4 \right]_\alpha^\beta = -\frac{1}{12} [(1+\cos\theta)^4]_0^\pi =$$

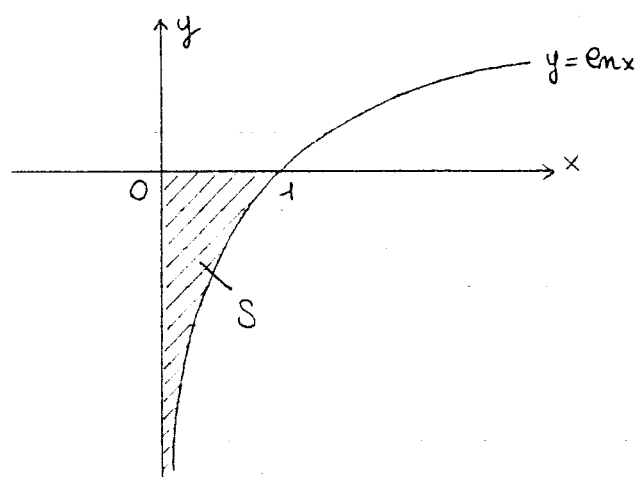
$$= -\frac{1}{12} (0 - 2^4) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha = \cos 0 = 1 \\ \beta = \cos \pi = -1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

In ipotesi di densità costante, trovare il baricentro di:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, e^{\kappa x} \leq y \leq 0\}$$



S è una regione illimitata
ma la sua area è finita.

Area di $S = - \int_0^1 e^{\kappa x} dx$ È un integrale generalizzato, perché $e^{\kappa x}$ non è definito in 0.

Troviamo una primitiva:

$$\int e^{\kappa x} dx = x e^{\kappa x} - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x e^{\kappa x} - x + c = x(e^{\kappa x} - 1) + c$$

$$\int_0^1 e^{\kappa x} dx = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \int_{\kappa}^1 e^{\kappa x} dx = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} [x(e^{\kappa x} - 1)]_{\kappa}^1 = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} [-1 - \kappa(e^{\kappa \kappa} - 1)]$$

$$\text{Area di } S = - \int_0^1 e^{\kappa x} dx = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} [1 + \underbrace{\kappa(e^{\kappa \kappa} - 1)}_{\substack{\downarrow 0^+ \\ \downarrow -\infty \\ \downarrow -\infty}}] = 1 + \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \kappa(e^{\kappa \kappa} - 1)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \kappa(e^{\kappa \kappa} - 1) = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{e^{\kappa \kappa} - 1}^{\nearrow -\infty}}{\underbrace{1/\kappa}_{\searrow +\infty}} \stackrel{(H)}{=} \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \frac{1/\kappa}{-1/\kappa^2} = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} (-\kappa) = 0$$

$$\text{Area di } S = 1 + \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \kappa(e^{\kappa \kappa} - 1) = 1 + 0 = 1$$

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{\iint_S x dx dy}{1} = \int_0^1 x dx \int_{e^{\kappa x}}^0 dy = \int_0^1 x [y]_{e^{\kappa x}}^0 dx = \\ &= - \int_0^1 x e^{\kappa x} dx = - \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \int_{\kappa}^1 x e^{\kappa x} dx \end{aligned}$$

$$\int x e^{mx} dx = \frac{x^2}{2} e^{mx} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} e^{mx} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} e^{mx} - \frac{x^2}{4} + c =$$

$$= \frac{x^2}{4} (2e^{mx} - 1) + c$$

$$- \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \int_{\kappa}^1 x e^{\kappa x} dx = - \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{4} (2e^{\kappa x} - 1) \right]_{\kappa}^1 =$$

$$= \frac{1}{4} + \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\kappa^2}{4}}_{\downarrow 0} \underbrace{(2e^{\kappa \kappa} - 1)}_{\downarrow -\infty} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} = x_B$$

$$y_B = \frac{\iint_S y \, dx \, dy}{-1} = \int_0^1 dx \int_{e^{\kappa x}}^0 y \, dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{e^{\kappa x}}^0 dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \int_{\kappa}^1 e^{\kappa^2 x} dx$$

$$\int e^{\kappa^2 x} dx = x e^{\kappa^2 x} - \int x \cdot 2e^{\kappa x} \frac{1}{x} dx = x e^{\kappa^2 x} - 2 \int e^{\kappa x} dx =$$

$$= x e^{\kappa^2 x} - 2x(e^{\kappa x} - 1) + c = x(e^{\kappa^2 x} - 2e^{\kappa x} + 2) + c$$

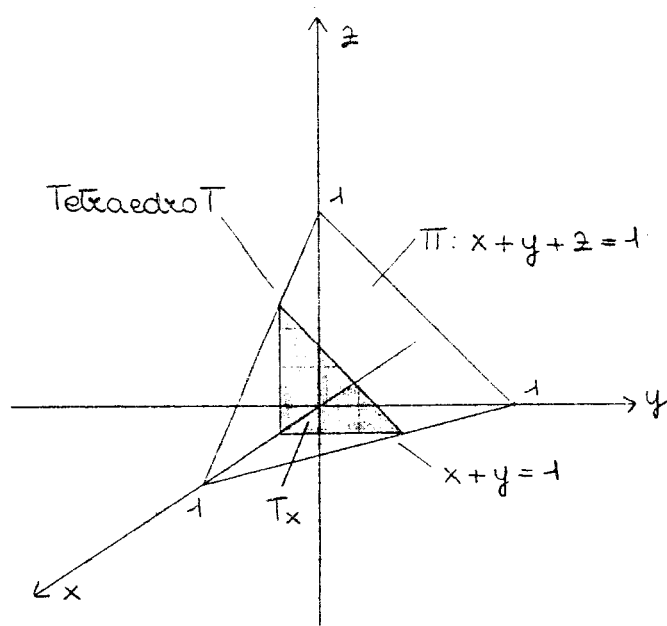
$$\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \int_{\kappa}^1 e^{\kappa^2 x} dx = \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \left[x(e^{\kappa^2 x} - 2e^{\kappa x} + 2) \right]_{\kappa}^1 =$$

$$= \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} [2 - \kappa(e^{\kappa^2 \kappa} - 2e^{\kappa \kappa} + 2)] = 2 - \lim_{\kappa \rightarrow 0^+} \kappa(e^{\kappa^2 \kappa} - 2e^{\kappa \kappa} + 2) = 2$$

$$y_B = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

$$B = \left(\frac{1}{4}, -1 \right)$$

Integrali tripli



Il volume del tetraedro è:

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

T_x è y - z semplice (x è costante, mentre y e z sono variabili) $\Rightarrow$ "x-affettiamo"

$$\iiint_T 1 dx dy dz = \int_0^1 dx \iint_{T_x} 1 dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz =$$

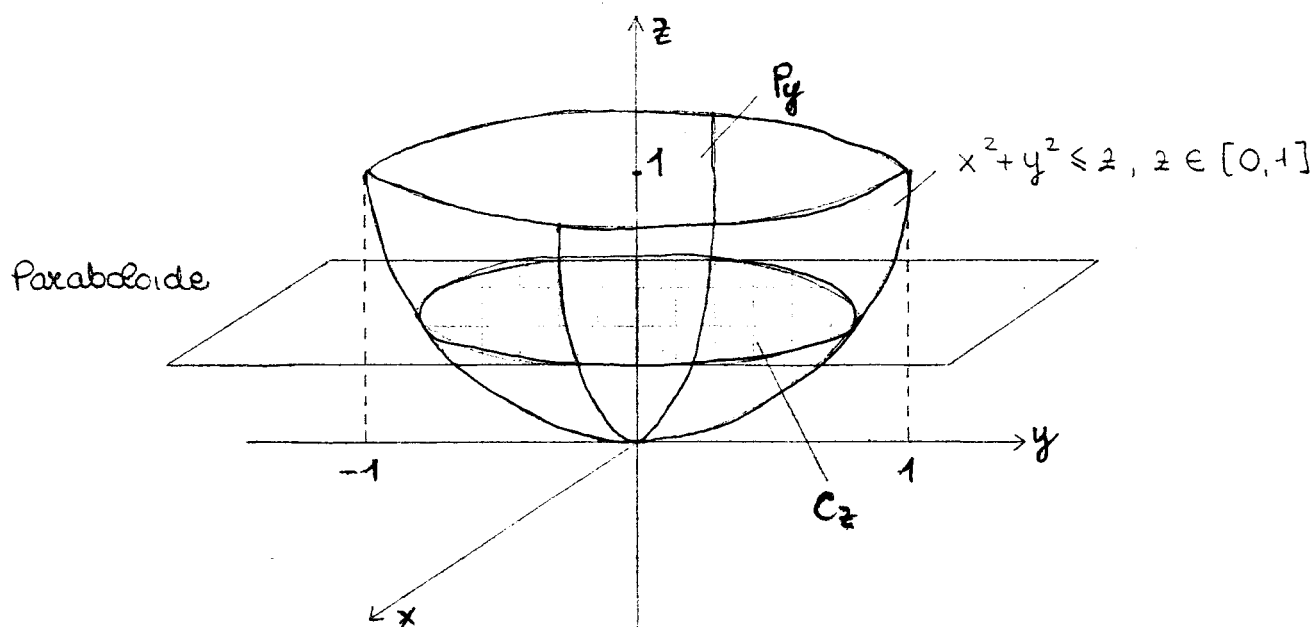
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(1-x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1-x - x + x^2 - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + x \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Trasformazione in coordinate cilindriche



L'integrale $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ può essere risolto in due modi:

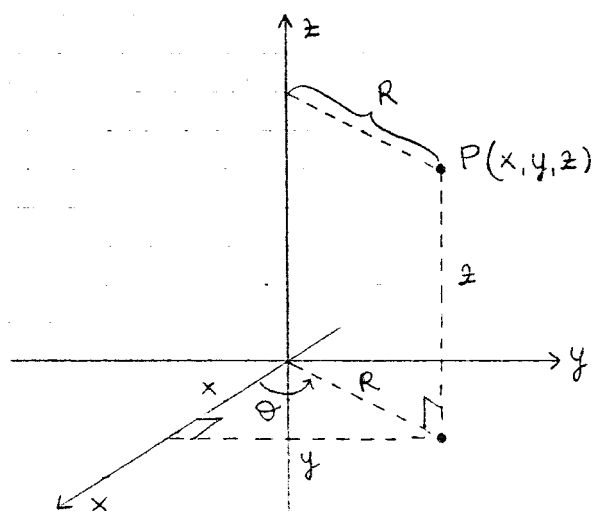
$$1) \int_{-1}^1 dy \iint_{P_y} f(x, y, z) dx dz$$

dove P_y è una superficie parabolica nel piano $\parallel xz$, avente eq.^{me} $z \geq x^2 + y^2$ (con y costante). P_y è un dominio $x-z$ semplice.

$$2) \int_0^1 dz \iint_{C_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove C_z è un disco nel piano $\parallel xy$, avente eq.^{me} $x^2 + y^2 \leq z$ (con z costante). C_z è un dominio $x-y$ semplice.

Per risolvere l'integrale nel secondo modo, conviene considerare il seguente cambiamento di variabili:



$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

R = distanza di P dall'asse z

θ = angolo che la proiezione di P sul piano xy forma con l'asse x

È individuato univocamente dalle coordinate cartesiane $(x, y, z) \Rightarrow$ la trasformazione in coordinate cilindriche $(R \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R})$ è biettiva.

La matrice Jacobiana è pari a:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, z)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Così, lo Jacobiano (determinante della matrice Jacobiana) è pari a:

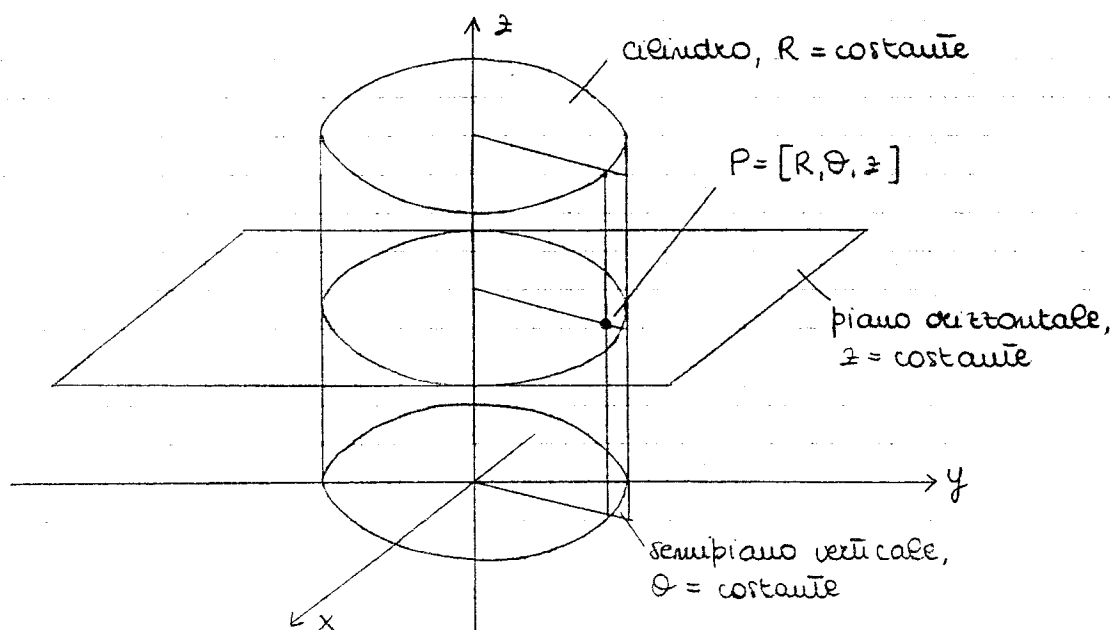
$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, z)} \right| = R \cos^2 \theta + R \sin^2 \theta = R (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R$$

Tornando all'esempio di prima ($1 \geq z'' \geq x^2 + y^2$), si ha che:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} f(x(R, \theta), y(R, \theta), z) R dR}_{II}$$

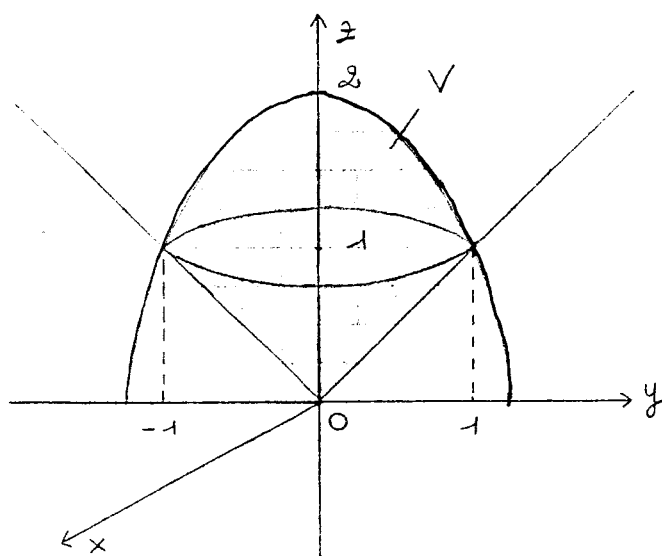
$$\iint_{C_z} f(x, y, z) dx dy$$

Le superfici coordinate del sistema di coordinate cilindriche sono le R -superfici (cilindri circolari verticali con centro sull'asse z), le θ -superfici (semipiani verticali aventi l'asse z come bordo) e le z -superfici (piani perpendicolari all'asse z). Le coordinate cilindriche si prestano a rappresentare domini che sono delimitati da tali superfici e in generale sono adatte ai problemi con simmetria assiale (simmetria attorno all'asse z).



ESEMPIO

Determinare la massa della regione di spazio che si trova sopra il cono di eq.^{ne} $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e sotto il paraboloide di eq.^{ne} $z = 2 - x^2 - y^2$, avente densità $\delta = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \}$$

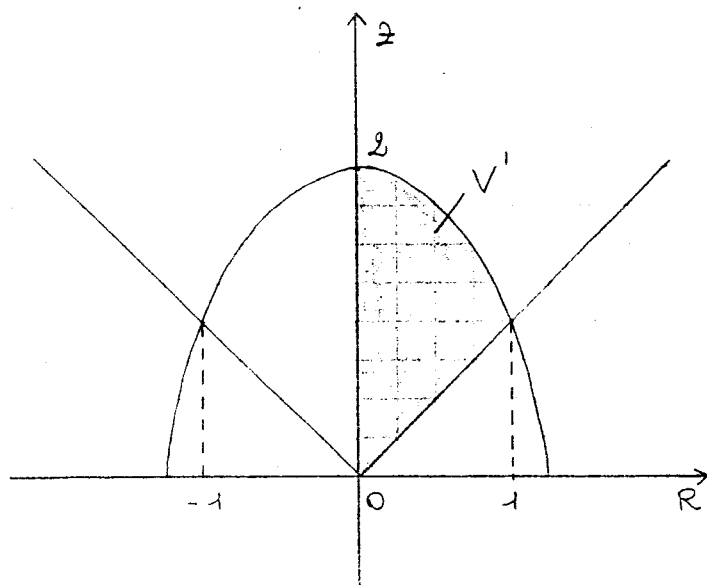
Massa = densità $\times$ volume

$$\text{Massa} = \iiint_V (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy \, dz$$

In coordinate cilindriche, V si trasforma in V' e δ in δ' :

$$V' = \{ (R, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq z \leq 2 - R^2, 0 \leq R \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$$\delta' = 2z - R$$



$$\begin{aligned}
\iiint_V (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{V_1} (2z - R) R \, dR \, d\theta \, dz = \\
&= \iiint_{V_1} (2Rz - R^2) \, dR \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dR \int_R^{2-R^2} (2Rz - R^2) \, dz = \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[2R \frac{z^2}{2} - R^2 z \right]_R^{2-R^2} dR = 2\pi \int_0^1 \left[Rz(z-R) \right]_R^{2-R^2} dR = \\
&= 2\pi \int_0^1 R \left[z(z-R) \right]_R^{2-R^2} dR = 2\pi \int_0^1 R (R^4 + R^3 - 4R^2 - 2R + 4) \, dR = \\
&= 2\pi \int_0^1 (R^5 + R^4 - 4R^3 - 2R^2 + 4R) \, dR = \\
&= 2\pi \left[\frac{R^6}{6} + \frac{R^5}{5} - 4 \frac{R^4}{4} - 2 \frac{R^3}{3} + 4 \frac{R^2}{2} \right]_0^1 = \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - 1 - \frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{7}{5} \pi
\end{aligned}$$